Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement des Innern EDI

Bundesamt für Gesundheit BAG
Direktionsbereich Kranken- und Unfallversicherung

Technischer Anhang zum KVG Solvenztest: Versicherungsrisiko

Datum: 1. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

Weitere Informationen:

Bundesamt für Gesundheit, Direktionsbereich Kranken- und Unfallversicherung, Abteilung Versicherungsaufsicht,
Sektion Prämien und Solvenzaufsicht; www.bag.admin.ch/solvenztest; Tel. +41 58 480 87 93, fabrice.perler@bag.admin.ch

1 Vorwort

Dieser technische Anhang beschreibt das versicherungstechnische Risiko, wie es neu für den KVG-Solvenztest 2021 gültig ist. Das BAG hat in den letzten Jahren verschiedene Anpassungen des KVG-ST geprüft. Dies betrifft die Szenarien, die Berechnung des versicherungstechnischen Risikos und das Marktrisiko. Für den Solvenztest 2020 wurden die Szenarien in Zusammenarbeit mit der SAV überarbeitet. Die Anpassungen bei der Berechnung des Marktrisikos erfolgen auf Grund von Änderungen der FINMA im SST. Die Anpassungen 2021 sind in der Wegleitung zum KVG-Solvenztest 2020 beschrieben. Im KVG Solvenztest 2021 wurden gegenüber der Version 2020 keine wesentlichen technischen Änderungen vorgenommen.

Das BAG hat in den Jahren 2015 und 2016 die Berechnung der versicherungstechnischen Risiken der Nettoleistungen und des Risikoausgleichs mit der Arbeitsgruppe Krankenversicherung der SAV diskutiert. Die Diskussionen führten u.a. zum Ergebnis, dass die Risiken der Nettoleistungen und des Risikoausgleichs möglichst nach gleichen Kriterien berechnet werden sollen. Weil zudem im Jahr 2020 pharmazeutische Kostengruppen (PCG) als Morbiditätsindikatoren im Risikoausgleich eingeführt werden, hat das BAG im Jahr 2017 die Firma Ernst & Young (EY) beauftragt, das bestehende Modell und neue Modelle für die Risiken des Risikoausgleichs zu evaluieren. Das BAG hat einen Vorschlag von EY übernommen, die Risiken des Risikoausgleichs analog wie bei den Nettoleistungen neu als Summe des Zufalls- und Parameterrisikos zu berechnen. Insbesondere werden die Zufallsrisiken der Nettoleistungen und des Risikoausgleichs mit Hilfe von Variationskoeffizienten berechnet. Zudem wird die Entlastung der jungen Erwachsenen im Risikoausgleich berücksichtigt.

2 Zufalls- und Parameterrisiko ohne Rückversicherung

Das versicherungstechnische Risiko wird in das Zufalls-, Parameter und Risikoausgleichsrisiko (bei der OKP) aufgeteilt. Das aggregierte Zufalls- und Parameterrisiko wird in der OKP als versicherungstechnisches Risiko ohne Risikoausgleich oder als Schaden- und Leistungsrisiko bezeichnet. Bei den restlichen Sparten entspricht das aggregierte Zufalls- und Parameterrisiko dem versicherungstechnischen Risiko.

Die Risiken der Nettoleistungen (i.e. das versicherungstechnische Risiko ohne RA der OKP Sparte) und des Risikoausgleichs werden nach Gesprächen mit der SAV und einem Vorschlag von EY nach denselben Grundsätzen, d.h. durch Zufalls- und Parameterrisiken, berechnet. Der Bericht von EY beschreibt die Risiken des Risikoausgleichs. Die darin verwendeten Darstellungen unterscheiden sich teilweise von denen des vorliegenden Dokumentes. Der Bericht von EY ist auf Anfrage beim BAG erhältlich. Für die Berechnung der Risiken der Nettoleistungen und des Risikoausgleichs sollen die folgenden, gemeinsamen Vorgaben gelten:

- Die Versicherten werden in als homogen betrachtete Risikoklassen eingeteilt.
- Die Versichertenbestände werden als gegeben, d.h. als deterministische Variable, betrachtet.
- Die Variationskoeffizienten für die Zufalls- und Parameterrisiken der Nettoleistungen und des Risikoausgleichs werden vom BAG geschätzt und vorgegeben.

Die Zufalls- und Parameterrisiken der restlichen Sparten werden weiterhin durch vorgegebene Variationskoeffizienten berechnet.

Die Risiken der Nettoleistungen sind im Kapitel 2.1 und die Risiken des Risikoausgleichs im Kapitel 2.2 dargestellt. Die beiden Risiken werden als unabhängig betrachtet, da für die Nettoleistungen die Leistungen des laufenden Jahres und für den Risikoausgleich die Leistungen des Vorjahres massgebend sind. Für die Berechnung des Gesamtrisikos werden somit die Varianzen der Nettoleistungen und des Risikoausgleichs addiert. Im Kapitel 2.4 werden die Risiken der restlichen Sparten behandelt.

2.1 Risiko der Nettoleistungen

Nach den Vorgaben sind die Versicherten in als homogen betrachtete Risikoklassen eingeteilt. Bezeichnen Y_r die Best-Estimate Schätzungen der Nettoleistungen und Θ_r die Risikofunktionen der Klassen r, so sind die effektiven Nettoleistungen wie bei Gisler[1] durch $S_r = \Theta_r \cdot Y_r$ gegeben. Der Erwartungswert der Funktionen Θ_r sei gleich Eins. Im Folgenden gelten die Voraussetzungen, dass die Nettoleistungen Y_r unabhängig voneinander und unabhängig von den Funktionen $\{\Theta_k\}_k$ sind. Mit $E(\Theta_r) = 1$ gilt $E(S_r) = E(\theta_r \cdot Y_r) = E(\theta_r) \cdot\ E(Y_r) = E(Y_r)$.

Risikofunktionen beschreiben Abweichungen der Nettoleistungen von Best Estimate-Schätzungen auf Grund externer Ereignisse, deren Auswirkungen zu Beginn des Jahres nicht oder nicht vollständig bekannt sind. Diese Ereignisse wirken sich ähnlich auf die Nettoleistungen S_r der verschiedenen Klassen r aus, führen somit zu positiven Korrelationen zwischen den Risikofunktionen und zu nicht diversifizierten Schätzfehlern. Die Varianz des Totals der Nettoleistungen S ergibt sich als Summe der Kovarianzen von S_r:

[1] «The Insurance Risk in the SST and in Solvency II: Modelling and Parameter Estimation», https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2704364

$$
\begin{aligned}
Var(S) = Var\left(\sum_r S_r\right) &= \sum_{r,k} Cov(S_r, S_k) = \sum_{r,k} Cov(\theta_r \cdot Y_r, \theta_k \cdot Y_k) \\
&= \sum_{r,k} [E(\theta_r \cdot Y_r \cdot \theta_k \cdot Y_k) - E(\theta_r \cdot Y_r) \cdot E(\theta_k \cdot Y_k)] \\
&= \sum_{r,k} [E(Y_r \cdot Y_k) \cdot E(\theta_r \cdot \theta_k) - E(\theta_r) \cdot E(Y_r) \cdot E(\theta_k) \cdot E(Y_k)] \\
&= \sum_{r,k} [\{Cov(Y_r, Y_k) + E(Y_r) \cdot E(Y_k)\} \cdot \{Cov(\theta_r, \theta_k) + E(\theta_r) \cdot E(\theta_k)\} - E(Y_r) \cdot E(Y_k)] \\
&= \sum_r Var(Y_r) \cdot (Var(\theta_r) + 1) + \sum_{r,k} [E(Y_r) \cdot E(Y_k) \cdot (Cov(\theta_r, \theta_k) + 1) - E(Y_r) \cdot E(Y_k)] \\
&= \underbrace{\sum_r Var(Y_r) \cdot (Var(\theta_r) + 1)}_{\text{Zufallsrisiko}} + \underbrace{\sum_{r,k} E(Y_r) \cdot E(Y_k) \cdot Cov(\theta_r, \theta_k)}_{\text{Parameterrisiko}}
\end{aligned}
$$

Parameterrisiko

Die Kovarianzen der Risikofunktionen für die verschiedenen Klassen sind im Allgemeinen unterschiedlich. Das Parameterrisiko ist somit grundsätzlich von der Risikostruktur der Versicherer abhängig und nicht für alle Versicherer gleich. Allerdings sind die Kovarianzen im Allgemeinen nicht bekannt und werden durch den mittleren Variationskoeffizienten des Parameterrisikos Vko_{par} ersetzt:

$$
Vko_{par}^2 = \frac{\sum_{r,k} Cov(\theta_r, \theta_k) \cdot E(Y_r) \cdot E(Y_k)}{\sum_{r,k} E(Y_r) \cdot E(Y_k)}
$$

Damit ergibt sich für das Parameterrisiko (mit $Y = \sum_r Y_r$)

$$
\begin{aligned}
\sum_{r,k} Cov(\theta_r, \theta_k) \cdot E(Y_r) \cdot E(Y_k) = Vko_{par}^2 \cdot \sum_{r,k} E(Y_r) \cdot E(Y_k) &= Vko_{par}^2 \cdot \left(\sum_r E(Y_r)\right)^2 = Vko_{par}^2 \cdot E^2(Y) \\
&= Vko_{par}^2 \cdot E^2(S)
\end{aligned}
$$

Zufallsrisiko

Für die Berechnung des Zufallsrisikos der Nettoleistungen werden die Varianzen $Var(Y_r)$ durch Variationskoeffizienten der Einzelleistungen ausgedrückt. Bezeichnen n_r die Anzahl der Versicherten und Y_r^v die Best-Estimate Schätzung der Leistung der einzelnen Versicherten in den Klassen r, so ist für $Var(\Theta_r) \ll 1$

$$
\begin{aligned}
\big(1 + Var(\Theta_r)\big) \cdot Var(Y_r) \approx Var(Y_r) &= n_r \cdot Var(Y_r^v) = n_r \cdot Vko^2(Y_r^v) \cdot E^2(Y_r^v) \\
&= n_r \cdot Vko^2(Y_r^v) \cdot (E(Y_r)/n_r)^2 = Vko^2(Y_r^v) \cdot E^2(S_r)/n_r
\end{aligned}
$$

Risiko der Nettoleistungen

Die Varianz der Leistungen S entspricht der Summe des Zufalls- und Parameterrisikos:

$$
Var(S) = \sum_r Vko^2\,(Y_r^v) \cdot E^2(S_r)/n_r + Vko_{par}^2 \cdot E^2(S)
$$

2.2 Risikoausgleich mit PCG

2.2.1 Definitionen und Berechnung

Die Versicherten werden nach Art. 11 VORA in Risikogruppen nach Kanton, Alter, Geschlecht und Aufenthalt in einem Spital oder Pflegeheim im Vorjahr eingeteilt. Zudem können die Versicherten nach Art. 12 in PCG eingeteilt werden. Diese Einteilung in PCG berücksichtigt die Risikofaktoren nach Art. 11 VORA nicht und ist somit gesamtschweizerisch und nicht kantonal definiert.

Datenlieferungen

Nach Art. 6 VORA reichen die Versicherer der gemeinsamen Einrichtung KVG für die Berechnung des

Risikoausgleichs im Ausgleichsjahr t im Jahr $t+1$ (Abzugsdatum Ende Februar) für jeden Versicherten die Leistungen und Angaben zur Risikoeinteilung der Jahre t und $t-1$ ein.

Insgesamt werden für die Berechnung des Risikoausgleichs vier Datenlieferungen benötigt:

- Die Datenlieferung *t - 2 / 26* für das Jahr *t - 2* mit Abzugsdatum Ende Februar des Jahres *t* im Umfang von 26 Monaten liefert die Morbiditätsindikatoren Spitalaufenthalt und PCG für die Einteilung der Versicherten im Jahr *t – 1*.
- Die Datenlieferung *t - 1 / 14* für das Jahr *t - 1* mit Abzugsdatum Ende Februar des Jahres *t* im Umfang von 14 Monaten wird für die Berechnung der Teuerungsfaktoren zwischen den Jahren *t - 1* und *t* verwendet.
- Die Datenlieferung *t - 1 / 26* für das Jahr *t - 1* mit Abzugsdatum Ende Februar des Jahres *t +1* im Umfang von 26 Monaten liefert die Morbiditätsindikatoren Spitalaufenthalt und PCG für die Einteilung der Versicherten im Jahr *t*, sowie die Bestände und Leistungen für das Jahr *t - 1*.
- Die Datenlieferung *t / 14* für das Jahr *t* mit Abzugsdatum Ende Februar des Jahres *t +1* im Umfang von 14 Monaten wird für die Berechnung der Teuerungsfaktoren zwischen den Jahren *t - 1* und *t* verwendet und liefert die Bestände des Jahres *t*.

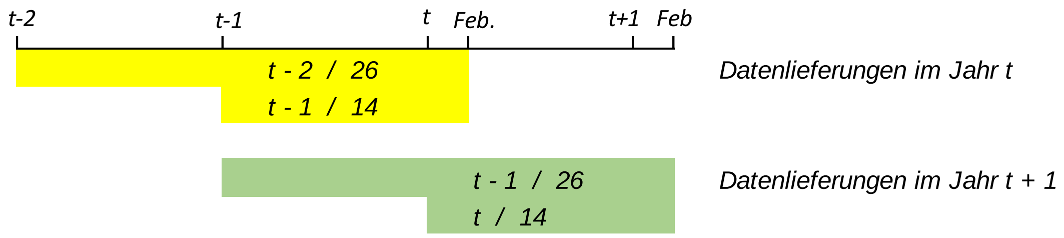

Abb. 1: Die vier Datenlieferungen der Versicherer.

Mit Hilfe der Leistungen und Bestände aus 14 Monaten des Ausgleichsjahrs t und des Vorjahrs $t-1$ werden die Teuerungsfaktoren nach Art. 13 VORA berechnet, siehe Kapitel 6.1. Aus den Angaben aus 26 Monaten des Vorjahrs $t-1$ werden mit Hilfe einer linearen Regression (siehe Kapitel 6.2) die Leistungen der einzelnen Versicherten im Ausgleichsjahr t geschätzt und u.a. die Ausgleichssätze berechnet, wobei vor der linearen Regression die Leistungen der Versicherten mit Hilfe der Teuerungsfaktoren korrigiert werden. Aus den Ergebnissen der linearen Regression und den Bestände der Versicherer im Jahr t (mit den Morbiditätsfaktoren Spitalaufenthalt und PCG des Jahres $t-1$) werden die Risikoausgleichszahlungen berechnet.

Berechnung des Risikoausgleichs

Für die Berechnung der Gruppendurchschnitte des Vorjahres $D_{k,r}(t-1)$ nach Art. 13 VORA, d.h. die durchschnittlichen Nettoleistungen der Risikoklasse r im Kanton k gilt die folgende Beziehung:[2]

$$D_{k,r}(t-1) = S^*_{k,r}(t-1)/n^*_{k,r}(t-1) = a_{k,r} + 1/n^*_{k,r}(t-1)\sum_p m^*_{k,r,p}(t-1)\cdot b_p$$

Dabei bezeichnen $S^*_{k,r}(t-1)$ die (mit dem Teuerungsfaktor multiplizierten) Nettoleistungen des Vorjahres in der Risikoklasse r und im Kanton k, $n^*_{k,r}(t-1)$ die Versichertenbestände des Vorjahres in der Summe über alle Versicherer in der Risikoklasse r und im Kanton k sowie $m^*_{k,r,p}(t-1)$ die Versichertenbestände des Vorjahres in der Summe über alle Versicherer in der Risikoklasse r im Kanton k und in der PCG p. Die Parameter $a_{k,r}$ und b_p entsprechen den modifizierten Gruppendurchschnitten nach Art. 18 VORA der Risikoklasse r im Kanton k und den Zuschlägen für die gesamtschweizerisch definierten PCG nach Art. 15 VORA für die PCG p.

Die im Ausgleichsjahr erwarteten Gesamtnettoleistungen der Risikogruppen nach Art. 14 Abs. 1 VORA betragen

[2] Die Beziehung entspricht den Gleichungen $S_l^{RIS} = A_{ll}\cdot a_l + \sum_p B_{lp}\cdot b_p$ in Kapitel 6.2

$$S_{k,r}^* = n_{k,r}^* \cdot a_{k,r} + \sum_p m_{k,r,p}^* \cdot b_p$$

$n_{k,r}^*$ und $m_{k,r,p}^*$ bezeichnen Risikobestände im Ausgleichsjahr t, wobei $n_{k,r}^*$ der Anzahl der Versicherten in der Summe über alle Versicherer im Kanton k sowie in der Risikoklasse r und $m_{k,r,p}^*$ der Anzahl der Versicherten in der Summe über alle Versicherer im Kanton k, in der Risikoklasse r und in der PCG p entsprechen. Dementsprechend betragen die kantonalen Mittelwerte bzw. die Gesamtdurchschnitte nach Art. 14 Abs. 2 VORA

$$D_k = \frac{1}{n_{k,*}^*} \cdot \sum_r S_{k,r}^* = \frac{1}{n_{k,*}^*} \cdot \sum_r \left(n_{k,r}^* \cdot a_{k,r} + \sum_p m_{k,r,p}^* \cdot b_p \right) = \frac{1}{n_{k,*}^*} \cdot \left(\sum_r n_{k,r}^* \cdot a_{k,r} + \sum_p m_{k,*,p}^* \cdot b_p \right)$$

Der Risikoausgleich RA_k^V des Versicherers V im Kanton k berechnet sich dann durch

$$RA_k^V = \sum_r n_{k,r}^V \cdot \left(a_{k,r} - D_k + L_{k,r} \right) + \sum_p m_{k,*,p}^V \cdot b_p$$

wobei $n_{k,r}^V$ den Risikobestand des Versicherers V im Kanton k und in der Klasse r im Jahr t und $m_{k,*,p}^V$ den Risikobestand des Versicherers V im Kanton k und in der PCG p im Jahr t bezeichnen.[3]

Die Abgabe- und Beitragssätze nach Art. 18 VORA entsprechen den Differenzen $a_{k,r} - D_k$. Zudem beschreibt $L_{k,r}$ die Entlastung der jungen Erwachsenen bzw. die zusätzliche Belastung der Erwachsenen im Kanton k und der Klasse r und ist im folgenden Kapitel 2.2.2 beschrieben.

Die vorgängig beschriebenen Definitionen stellen sicher, dass die Summe der Risikoausgleichsbeträge aller Versicherer in jedem Kanton gleich Null ist. Die Entlastung der jungen Erwachsenen führt nur zu einer Umverteilung zwischen den Versicherten innerhalb der Kantone und ist daher in der Summe über alle Versicherten eines Kantons gleich Null.

2.2.2 Entlastung der jungen Erwachsenen

Nach Art. 16a KVG werden die Risikoausgleichszahlungen der jungen Erwachsenen ab 2019 gleichmässig um 50% reduziert und die Risikoabgaben bzw. die Ausgleichsbeiträge der Erwachsenen dementsprechend erhöht bzw. gesenkt. Dazu werden die Beiträge der jungen Erwachsenen inkl. PCG-Zuschläge in der Summe über alle Versicherer kantonal ermittelt. 50% dieses Gesamtbetrags werden gleichmässig auf die Erwachsenen des Kantons umverteilt. Der umzuverteilende Gesamtbetrag $RA_{0,k}^*(JE)$ der jungen Erwachsenen in den Risikoausgleich **vor Entlastung** in der Summe über alle Versicherer im Kanton k beträgt somit

$$RA_{0,k}^*(JE) = \sum_r n_{k,r}^*(JE) \cdot \left(a_{k,r} - D_k \right) + \sum_p m_{k,*,p}^*(JE) \cdot b_p \leq 0$$

Die Summe über die Risikoklassen r berücksichtigt nur die Klassen der jungen Erwachsenen mit $n_{k,r}^*(JE) > 0$. Die Bestände $m_{k,*,p}^*(JE)$ bezeichnen die Anzahl der jungen Erwachsenen aller Versicherer im Kanton k und der PCG p. Da die jungen Erwachsenen insgesamt Nettozahler sind, ist $RA_{0,k}^*(JE)$ negativ. Für die Entlastungen bzw. die zusätzlichen Belastungen $L_{k,r}$ pro Versicherten ergibt sich demnach

$$L_{k,r} = \begin{cases} -0.5 \cdot RA_{0,k}^*(JE) / n_{k,*}^*(JE) & \text{für die Risikoklassen } r \text{ der jungen Erwachsenen} \\ 0.5 \cdot RA_{0,k}^*(JE) / n_{k,*}^*(E) & \text{für die Risikoklassen } r \text{ der Erwachsenen} \end{cases}$$

[3] (Bürgin, 2019) zeigt in Abschnitt E.1, dass diese Definition für die Berechnung des Risikoausgleichs von derjenigen der Verordnung über den Risikoausgleich in der Krankenversicherung (VORA) abweicht. Im Wesentlichen unterscheiden sich die Abgabe- und Beitragssätze. Da der Erwartungswert, im Vergleich zum Risiko des Risikoausgleichs, einen grösseren Einfluss auf die Solvenzquote hat, empfiehlt das BAG für die Schätzung der Abgabe- und Beitragssätze die Berechnungsart von (Bürgin, 2019) zu verwenden. Diese entspricht der offiziellen Berechnungsart des Risikoausgleichs mit PCG nach VORA.

$n_{k,*}^{*}(JE)$ bzw. $n_{k,*}^{*}(E)$ bezeichnen die Anzahl der jungen Erwachsenen bzw. der Erwachsenen im Kanton k in der Summe über alle Versicherer. Der Risikoausgleich nach Entlastung der jungen Erwachsenen beträgt somit pro Versicherer und Kanton

$$\begin{aligned} RA_k^V &= RA_{0,k}^V - n_{k,*}^V(JE) \cdot 0.5 \cdot RA_{0,k}^*(JE)/n_{k,*}^*(JE) + n_{k,*}^V(E) \cdot 0.5 \cdot RA_{0,k}^*(JE)/n_{k,*}^*(E) \\ &= RA_{0,k}^V - 0.5 \cdot \left(\frac{n_{k,*}^V(JE)}{n_{k,*}^*(JE)} - \frac{n_{k,*}^V(E)}{n_{k,*}^*(E)}\right) \cdot RA_{0,k}^*(JE) \end{aligned}$$

2.2.3 Risiko des Risikoausgleichs

Das Risiko des Risikoausgleichs mit PCG berechnet sich grundsätzlich gleich wie das Risiko der Nettoleistungen in Kapitel 2.1. Nachfolgend werden die Risikoausgleichszahlungen als Summen der Parameter $a_{k,r}$ und b_p beschrieben, wobei diese mit Koeffizienten multipliziert sind, welche nur von Versichertenbeständen abhängig sind. Nach dem Kapitel 6.2 können die Parameter $a_{k,r}$ und b_p bzw. die Parametervektoren a und b auf Grund der linearen Regression als Linearkombinationen von Nettoleistungen bzw. der Vektoren S^{RIS} und S^{PCG} berechnet werden, wobei die Koeffizienten wiederum nur von den Beständen abhängig sind. Somit können die gesamten Zahlungen des Risikoausgleichs RA^V als Summen von Nettoleistungen geschrieben werden, die mit Koeffizienten multipliziert sind, welche nur von den Beständen abhängig und damit deterministisch sind.

Für die Berechnung des Risikos des Risikoausgleichs werden die Risikoausgleichszahlungen inkl. der kantonalen Gesamtdurchschnitte und der Entlastung der jungen Erwachsenen linear in den Parametern $a_{k,r}$ und b_p ausgedrückt. Vor Entlastung der jungen Erwachsenen betragen die Risikoausgleichszahlungen

$$\begin{aligned} RA_{0,k}^V &= \sum_r n_{k,r}^V \cdot \left(a_{k,r} - \frac{1}{n_{k,*}^*} \cdot \left(\sum_{r'} n_{k,r'}^* \cdot a_{k,r'} + \sum_{p'} m_{k,*,p'}^* \cdot b_{p'}\right)\right) + \sum_p m_{k,*,p}^V \cdot b_p \\ &= \sum_r n_{k,r}^V \cdot a_{k,r} - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} \cdot \sum_r n_{k,r}^* \cdot a_{k,r} - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} \cdot \sum_p m_{k,*,p}^* \cdot b_p + \sum_p m_{k,*,p}^V \cdot b_p \\ &= \sum_r \left(n_{k,r}^V - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} \cdot n_{k,r}^*\right) \cdot a_{k,r} + \sum_p \left(m_{k,*,p}^V - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} \cdot m_{k,*,p}^*\right) \cdot b_p \end{aligned}$$

Für die Berücksichtigung der Entlastung der jungen Versicherten wird ihr Anteil an den Risikoausgleichszahlungen für die Gesamtbranche berechnet:

$$RA_{0,k}^*(JE) = \sum_r \left(n_{k,r}^*(JE) - \frac{n_{k,*}^*(JE)}{n_{k,*}^*} \cdot n_{k,r}^*\right) \cdot a_{k,r} + \sum_p \left(m_{k,*,p}^*(JE) - \frac{n_{k,*}^*(JE)}{n_{k,*}^*} \cdot m_{k,*,p}^*\right) \cdot b_p$$

$n_{k,*}^*(JE)$ ist nur ungleich Null für die Risikoklassen der jungen Erwachsenen. Daraus ergibt sich nach den Ergebnissen von Kapitel 2.2.2

$$\begin{aligned} RA_k^V &= RA_{0,k}^V - 0.5 \cdot \left(\frac{n_{k,*}^V(JE)}{n_{k,*}^*(JE)} - \frac{n_{k,*}^V(E)}{n_{k,*}^*(E)}\right) \cdot RA_{0,k}^*(JE) = \\ &= \sum_r \left(n_{k,r}^V - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} \cdot n_{k,r}^* - 0.5 \cdot \left(\frac{n_{k,*}^V(JE)}{n_{k,*}^*(JE)} - \frac{n_{k,*}^V(E)}{n_{k,*}^*(E)}\right) \cdot \left(n_{k,r}^*(JE) - \frac{n_{k,*}^*(JE)}{n_{k,*}^*} \cdot n_{k,r}^*\right)\right) \cdot a_{k,r} \\ &+ \sum_p \left(m_{k,*,p}^V - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} \cdot m_{k,*,p}^* - 0.5 \cdot \left(\frac{n_{k,*}^V(JE)}{n_{k,*}^*(JE)} - \frac{n_{k,*}^V(E)}{n_{k,*}^*(E)}\right) \cdot \left(m_{k,*,p}^*(JE) - \frac{n_{k,*}^*(JE)}{n_{k,*}^*} \cdot m_{k,*,p}^*\right)\right) \cdot b_p \end{aligned}$$

Damit kann der Risikoausgleich mit

$$\alpha_{k,r}^V = \left(\frac{n_{k,r}^V}{n_{k,r}^*} - \frac{n_{k,*}^V}{n_{k,*}^*} - 0.5 \cdot \left(\frac{n_{k,*}^V(JE)}{n_{k,*}^*(JE)} - \frac{n_{k,*}^V(E)}{n_{k,*}^*(E)}\right) \cdot \left(\frac{n_{k,r}^*(JE)}{n_{k,r}^*} - \frac{n_{k,*}^*(JE)}{n_{k,*}^*}\right)\right) \cdot n_{k,r}^*$$

$$\beta_{k,p}^{V} = \left(\frac{m_{k,*,p}^{V}}{m_{k,*,p}^{*}} - \frac{n_{k,*}^{V}}{n_{k,*}^{*}} - 0.5 \cdot \left(\frac{n_{k,*}^{V}(JE)}{n_{k,*}^{*}(JE)} - \frac{n_{k,*}^{V}(E)}{n_{k,*}^{*}(E)}\right) \cdot \left(\frac{m_{k,*,p}^{*}(JE)}{m_{k,*,p}^{*}} - \frac{n_{k,*}^{*}(JE)}{n_{k,*}^{*}}\right)\right) \cdot m_{k,*,p}^{*}$$

wie folgt geschrieben werden:

$$RA^{V} = \sum_{k,r} \alpha_{k,r}^{V} \cdot a_{k,r} + \sum_{k,p} \beta_{k,p}^{V} \cdot b_{p} = \sum_{k,l} \gamma_{k,l}^{V} \cdot c_{k,l}$$

Für die Berechnung des Risikoausgleichsrisikos werden die Indizes r und p im Index l zusammengefasst, d.h. die Koeffizienten $\alpha_{k,r}^{V}$ und $\beta_{k,p}^{V}$ als $\gamma_{k,l}^{V}$ und die Parameter $a_{k,r}$ und b_{p} als $c_{k,l}$ geschrieben. Da die Faktoren $\gamma_{k,l}^{V}$ nur von Versichertenbeständen abhängig und damit nach Voraussetzung deterministisch sind, müssen nur die Varianzen der Parameter $c_{k,l}$ geschätzt werden.

Damit können die Risiken bzw. die Varianzen des Risikoausgleichs grundsätzlich gleich wie die der Nettoleistungen in Kapitel 2.1 berechnet werden, in dem die Nettoleistungen durch $\gamma_{k,l}^{V} \cdot c_{k,l}$ ersetzt werden.

Parameterrisiko

Das Parameterrisiko des Risikoausgleichs ergibt sich unter den oben dargestellten Voraussetzungen, aus der Beziehung $\sum_{r,k} Cov(\theta_r, \theta_k) \cdot E(Y_r) \cdot E(Y_k)$ in Kapitel 2.1, in dem die Variablen θ_r und Y_r durch $\theta_{k,l}$ und $\gamma_{k,l}^{V} \cdot c_{k,l}$ und die Variablen θ_k und Y_k durch $\theta_{k',l'}$ und $\gamma_{k',l'}^{V} \cdot c_{k',l'}$ ersetzt werden. Damit erhält man

$$\sum_{k,k',l,l'} Cov\left(\theta_{k,l}, \theta_{k',l'}\right) \cdot \gamma_{k,l}^{V} \cdot E\left(c_{k,l}\right) \cdot \gamma_{k',l'}^{V} \cdot E\left(c_{k',l'}\right) = Vko_{par}^{2} \cdot \left(\sum_{k,l} \gamma_{k,l}^{V} \cdot E\left(c_{k,l}\right)\right)^{2}$$
$$= Vko_{par}^{2} \cdot E^{2}\left(\sum_{k,r} \alpha_{k,r}^{V} \cdot a_{k,r} + \sum_{k,p} \beta_{k,p}^{V} \cdot b_{p}\right) = Vko_{par}^{2} \cdot E^{2}\left(RA^{V}\right)$$

Zufallsrisiko

Das Zufallsrisiko des Risikoausgleichs erhält man mit der Annahme voneinander unabhängiger Parameter $c_{k,l}$, aus dem Ausdruck $\sum_r Var\,(Y_r)$ in Kapitel 2.1, in dem man Y_r durch $\gamma_{k,l}^{V} \cdot c_{k,l}$ ersetzt:

$$\sum_{k,l} Var\left(\gamma_{k,l}^{V} \cdot c_{k,l}\right) = \sum_{k,l} \left(\gamma_{k,l}^{V}\right)^{2} \cdot Var\left(c_{k,l}\right) = \sum_{k,l} \left(\gamma_{k,l}^{V}\right)^{2} \cdot Vko^{2}\left(c_{k,l}\right) \cdot E^{2}\left(c_{k,l}\right)$$
$$= \sum_{k,r} \left(\alpha_{k,r}^{V}\right)^{2} \cdot Vko^{2}\left(a_{k,r}\right) \cdot E^{2}\left(a_{k,r}\right) + \sum_{k,p} \left(\beta_{k,p}^{V}\right)^{2} \cdot Vko^{2}\left(b_{p}\right) \cdot E^{2}\left(b_{p}\right)$$
$$= \sum_{k,r} \left(\alpha_{k,r}^{V}\right)^{2} \cdot Vko^{2}\left(Y_{k,r}^{V}\right) \cdot E^{2}\left(a_{k,r}\right) / n_{k,r}^{*} + \sum_{k,p} \left(\beta_{k,p}^{V}\right)^{2} \cdot Vko^{2}\left(Y_{p}^{V}\right) \cdot E^{2}\left(b_{p}\right) / m_{k,r}^{*}$$

Die Variationskoeffizienten $Vko^{2}\left(a_{k,r}\right)$ der Parameter $a_{k,r}$ und der Zuschläge für PCG b_{p} werden durch Variationskoeffizienten der Einzelleistungen ausgedrückt, siehe Abschnitt 2.3.

Hinweis zu der Berechnung im Feldtest 2018

Die Summe $\sum_r \alpha_{k,r}^{V} \cdot a_{k,r} + \sum_p \beta_{k,p}^{V} \cdot b_{p}$ entspricht der Summe der Risikoausgleichszahlungen der Risikoklassen $RA_{k,r}^{V}$ und PCG $RA_{k,p}^{V}$ eines Kantons k, d.h.

$$RA_{k}^{V} = \sum_{r} \alpha_{k,r}^{V} \cdot a_{k,r} + \sum_{p} \beta_{k,p}^{V} \cdot b_{p} = \sum_{r} RA_{k,r}^{V} + \sum_{p} RA_{k,p}^{V}$$

Risiko des Risikoausgleichs

Die Varianz des Risikoausgleichs berechnet sich als Summe der Varianzen des Parameter- und Zufallsrisikos:

$$Var(RA^V) = Vko_{par}^2 \cdot E^2(RA^V) + \sum_{k,r} \left(\alpha_{k,r}^V\right)^2 \cdot Vko^2\left(Y_{k,r}^V\right) \cdot E^2\left(a_{k,r}\right)/n_{k,r}^* + \sum_{k,p} \left(\beta_{k,p}^V\right)^2 \cdot Vko^2\left(Y_p^V\right) \cdot E^2\left(b_p\right)/m_{k,r}^*$$

2.3 Input der Versicherer

Für die Nettoleistungen werden die Schätzungen des Erwartungswerts und des Zufallsrisikos im Blatt 35 «Zufallsrisiko_NL» vorgenommen. Dort tragen die Versicherer die geschätzten Risikobestände und Nettoleistungen (in Mio. CHF) pro Risikoklasse in der Summe über alle Kantone für das Geschäftsjahr und das Vorjahr ein. Die Nettoleistungen sind als positive Werte einzutragen. Die im Blatt 36 «Risk_Compensation» enthaltenen Bestände werden automatisch übernommen. Neben den Versicherten in den Risikoausgleichsklassen werden auch die weiteren in der OKP versicherten Personen berücksichtigt, die nicht dem Risikoausgleich unterstehen, wie die Kinder und die Versicherten der OKP EU. Voneinander abweichende Nettoleistungen in den Blättern «Zufallsrisiko_NL» und «Insurance_Risk» sind zu begründen.

Für den Risikoausgleich sind im Blatt «Risk_Compensation» wie bisher die durchschnittlichen Bestände der Versicherer pro Risikoausgleichsklasse und Kanton sowie pro PCG und Kanton einzutragen. Zusätzlich müssen die Risikoausgleichssätze pro Risikoklasse und Kanton (pro Monat in CHF) sowie die Zuschläge für die PCG (pro Monat in CHF) geschätzt und angegeben werden.

Unterschiedliche Erwartungswerte der Nettoleistungen in Blatt 35 und des Risikoausgleichs in Blatt 36 im Vergleich zu den entsprechenden Angaben im Blatt 37 sind zu begründen.

Das BAG schätzt die Variationskoeffizienten der Parameter $a_{k,r}$ und der Zuschläge für PCG b_p für die Berechnung des Zufallsrisikos aus den Daten des zweiten Probelaufs für das Jahr 2018. Die Variationskoeffizienten wurden aus den Einzelleistungen sowie mit Hilfe eines Bootstrap-Verfahrens berechnet, welches allfällige Instabilitäten der linearen Regression mitberücksichtigt. Beide Verfahren führten für die Parameter $a_{k,r}$ zu ähnlichen Ergebnissen. Im Template wurden daher die Variationskoeffizienten der Einzelleistungen übernommen, die auch für die Berechnung des Zufallsrisikos der Nettoleistungen verwendet werden. Für die Zuschläge für PCG wurden die Ergebnisse des Bootstrap-Verfahrens übernommen, welches höhere Variationskoeffizienten lieferte als die Einzelleistungen. Auf Grund der kleinen Bestände in einigen Kantonen werden die Variationskoeffizienten der Risikoklassen als Mittelwerte über alle Kantone bestimmt.

Der Variationskoeffizient des Parameterrisikos für den Risikoausgleich beträgt für alle Versicherer einheitlich 4.0%. Das BAG gibt weiter die benötigten Branchenbestände und Erwartungswerte der Parameter $a_{k,r}$ für die Berechnung des Zufallsrisikos im Blatt «Risk_Compensation_calc» vor. Die Angaben für den Risikoausgleich stammen allesamt aus dem zweiten Probelauf. Das Risiko des Risikoausgleichs wird automatisch ins Blatt «Insurance_Risk» übertragen.

2.4 Risiko der restlichen Sparten

Zufallsrisiko

Das Zufallsrisiko der restlichen Sparten entspricht dem im technischen Dokument der Finma (S. 73) beschriebenen Zufallsrisiko. Es beschreibt die statistischen Schwankungen der Anzahl Versicherungsleistungen und ihrer Höhe. Es ist daher abhängig von der Anzahl der Versicherten und damit von der Grösse der Versicherungsgesellschaft. Das Zufallsrisiko ist für die Sparten h der Krankenversicherung folgendermassen definiert:

$$Vko_{Z,h}(S) = \frac{\sigma_{Z,h}(S)}{E_h(S)} = \sqrt{\frac{1 + Vko_h^2(Y)}{N}}$$

S	Schadensumme (Summe der Einzelleistungen Y)
$Vko_{Z,h}$	Variationskoeffizient des Zufallsrisikos der verschiedenen KVG Versicherungssparten (Taggeld einzeln und kollektiv, ausgenommen aktive Rückversicherung)
$\sigma_{Z,h}$	Standardabweichung des Zufallsrisikos der verschiedenen KVG Versicherungssparten
$Vko_h(Y)$	Variationskoeffizient der Einzelleistungen Y der verschiedenen KVG Versicherungssparten
N	Anzahl Bezüger von Nettoleistungen
$E_h(S)$	Erwartungswert der Schadenssumme der verschiedenen KVG Versicherungssparten

Als Variationskoeffizient der Einzelleistungen wird für die Taggeldversicherung nach KVG einzeln und kollektiv ein Standardwert von 2.5 vorgegeben:

$$Vko_{Z,h}(Y) = 2.5$$

Daraus ergibt sich für $Vko_{Z,h}(S) = \sqrt{\frac{1+2.5^2}{N}} = \sqrt{\frac{7.25}{N}}$

Parameterrisiko

Das Parameterrisiko entspricht dem Parameterrisiko der Finma (s. techn. Dokument S. 74) und beschreibt die Unsicherheiten beim Schätzen allgemeiner Parameter z. B. für die Prognose der allgemeinen Kostenentwicklung oder von Tarifänderungen. Das Parameterrisiko ist für die Sparten h folgendermassen definiert:

$$Vko_{P,h}(S) = \frac{\sigma_{P,h}(S)}{E_h(S)}$$

$Vko_{P,h}$	Variationskoeffizient des Parameterrisikos der verschiedenen KVG Versicherungssparten (Taggeld einzeln und kollektiv, ausgenommen aktive Rückversicherung)
$\sigma_{P,h}$	Standardabweichung des Parameterrisikos der verschiedenen KVG Versicherungssparten
$E_h(S)$	Erwartungswert der Schadenssumme der verschiedenen KVG Versicherungssparten

3 Rückversicherung

Im KVG-ST gibt es die Möglichkeit, Stopp-Loss- und Grossrisiko-Rückversicherungen abzubilden. Bei der Stopp-Loss-Rückversicherung wird neu die Berücksichtigung der Kapazität (maximale Haftung) berücksichtigt.

3.1 Reduktion des Zufallsrisikos durch Grossrisiko-Rückversicherung

Das Zufallsrisiko kann durch eine Grossrisiko-Rückversicherung vermindert werden. In diesem Fall übernimmt der Versicherer nur noch die Einzelleistungen unterhalb eines festgelegten Schwellwerts (Selbstbehalt). Dies führt zu einer Reduktion der Variationskoeffizienten der Einzelleistungen. Der Reduktionsfaktor ist vom Selbstbehalt s abhängig und wird durch eine Weibull-Funktion mit vorgegebenen Parametern a und b modelliert:

$$Vko_{Z,h}(S+RV) = \frac{\sigma_{Z,h}(S+RV)}{E_h(S+RV)} = \sqrt{\frac{1 + Vko_h^2(Y) \cdot \left(1 - exp(-a \cdot s^b)\right)^2}{N}}$$

RV	Rückversicherungsleistungen (von der Rückversicherung übernommener Teil der Nettoleistungen)
S	Schadensumme (Summe der Einzelleistungen Y)
s	Selbstbehalt der Grossrisiko-Rückversicherung
a	0.00467
b	0.553

Begründung:
Diese Reduktion wird durch einen Reduktionsfaktor modelliert, der vom Selbstbehalt der Rückversicherung abhängig ist:

$$Vko_{xL}(Y) = F(s) \cdot Vko(Y)$$

$Vko(Y)$	Variationskoeffizient der Einzelleistungen Y vor Rückversicherung
$F(s)$	Reduktionsfaktor
s	Selbstbehalt der Rückversicherung
$Vko_{xL}(Y)$	Variationskoeffizient der Einzelleistungen Y nach Rückversicherung

$F(s)$ wurde für 42 verschiedene Selbstbehalt-Werte bestimmt (indem alle Leistungen > s auf s gesetzt wurden). Es zeigte sich, dass sich der Zusammenhang mit Hilfe einer Weibull-Verteilungsfunktion $F(s) = 1 - \exp(-a \cdot s^b)$ äusserst genau beschreiben lässt. Sie erfüllt auch die beiden Nebenbedingungen

$F(0) = 0$	Vollständiger Risiko-Transfer für $s = 0$
$F(\infty) = 1$	Keine Risikoreduktion für $s = \infty$

Die Parameter a und b wurden mit Hilfe einer linearen Regression bestimmt. Die Linearisierung der Weibull-Funktion

$$F(s) = 1 - \ exp(-a \cdot s^b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-F(s)}\right) = as^b$$

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(s)}\right)\right] = \ln(a) + b \cdot \ln(s)$$

führt zu folgendem Regressionsansatz

$y = \alpha + \beta \cdot x$, wobei

$\alpha = \ln(a)$
$\beta = b$
$x = \ln(s)$
$y = \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F(s)}\right)\right]$

mit folgenden Ergebnissen

Regressions-Statistik		
Multipler Korrelationskoeffizient	0.999952	(!)
Bestimmtheitsmaß	0.999905	
Adjustiertes Bestimmtheitsmaß	0.999903	
Standardfehler	0.001811	
Beobachtungen	42	

	Koeffizienten	*Standardfehler*	*t-Statistik*	*P-Wert*	*Untere 95%*	*Obere 95%*
α	-5.366022422	0.009450822	-568	9.35464E-80	-5.385123245	-5.346921599
β	0.553353597	0.000852970	649	4.52712E-82	0.551629681	0.555077512

Die gesuchten Parameter lauten $a = e^{\alpha} = e^{-5.366022422} \approx 0.00467$ und $b = \beta \approx 0.553$ und die gesuchte Funktion lautet somit $F(s) = 1 - \exp(-a \cdot s^{b}) = 1 - \exp(-0.00467 \cdot s^{0.553})$.

Der Vergleich zwischen realen und modellierten Reduktionsfaktoren ergibt dem Korrelationskoeffizienten entsprechend nur minime Abweichungen.

3.2 Reduktion des Parameterrisikos durch Stopp-Loss mit endlicher Kapazität

Das Parameter-Risiko kann durch einen Stopp-Loss-Rückversicherungsvertrag vermindert werden. In diesem Fall übernimmt der Versicherer nur noch die Summe der jährlichen Leistungen bis zu einem vereinbarten Schwellwert (=Priorität). Der Rückversicherer kann seine maximale Haftung (=Kapazität) begrenzen. Eine solche Stopp-Loss-Rückversicherung reduziert das Parameterrisiko σ sowie auch den mathematischen Erwartungswert μ der vom Erstversicherer zu tragenden Leistungen. Mit der Annahme eines normalverteilten Schadenaufwands $S = N(\mu, \sigma^2)$ lassen sich die Auswirkungen auf Erwartungswert und Standardabweichung des Parameterrisikos analytisch darstellen:

Der erwartete reduzierte Schadenaufwand $E(S_{SL})$ nach Abschluss einer Stopp-Loss-Rückversicherung mit Priorität P und Kapazität K beträgt:

(1) $$E(S_{SL}) = \int_{-\infty}^{P} y\varphi_S(y)dy + \int_{P}^{P+K} P\varphi_S(y)dy + \int_{P+K}^{\infty} (y-K)\varphi_S(y)dy$$

$$= \mu\Phi_P + \sigma(\varphi_{P+K} - \varphi_P) + P(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)(1 - \Phi_{P+K})$$

Die reduzierte Varianz $V(S_{SL})$ nach Abschluss einer Stopp-Loss-Rückversicherung mit Priorität P und Kapazität K beträgt:

(2) $$V(S_{SL}) = E(Y_{SL}^2) - E^2(Y_{SL})$$

$$= \sigma^2 \left(1 - (\Phi_{P+K} - \Phi_P) + \left(\tfrac{P+K-\mu}{\sigma}\right) \varphi_{P+K} - \left(\tfrac{P-\mu}{\sigma}\right) \varphi_P\right)$$

$$+\ 2\sigma\big((\mu - K)\varphi_{P+K} - \mu\varphi_P\big) + \mu^2\Phi_P + P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K}) - E^2(Y_{SL})$$

Notation:

$$\varphi_P = \varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right),\ \varphi_{P+K} = \varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right), \Phi_P = \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right), \Phi_{P+K} = \Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right),$$

wobei φ und Φ Dichte- und Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnen.

In Kapitel 6.3 sind die Beweise von (1) und (2) aufgeführt.

3.3 Input der Versicherer

Die Versicherer mit einer Stopp-Loss-Rückversicherung mit endlicher Kapazität müssen neu auf dem Blatt 37 «HE_insurance_risk» in Zeile 123 die entsprechenden Kapazitäten in Mio. CHF zusätzlich zu den bisherigen Eingaben eintragen. Verfügt der Versicherer über keine Stopp-Loss-Rückversicherung so bleiben die entsprechenden Felder in Zeile 123 leer (keine 0 eintragen). Bei unlimitierter Deckung ($K = \infty$) kann ein «hoher» Wert für K gewählt werden, z.B. die 10-fache Standardabweichung des Schaden- und Leistungsaufwandes.

4 Versicherungsrisiko im KVG Solvenztest

Aus den Standardabweichungen der Zufalls- und Parameterrisiken der verschiedenen Sparten und des Risikoausgleichs bei der OKP wird die Standardabweichung des gesamten versicherungstechnischen Risikos berechnet. In einem ersten Schritt werden das Zufalls- und Parameterrisiko innerhalb der Sparten mit der Annahme aggregiert, dass beide Risiken unabhängig voneinander sind. Die Standardabweichung des versicherungstechnischen Risikos der Sparte h (inklusive des versicherungstechnischen Risikos der OKP ohne RA) beträgt dann für jeden Krankenversicherer (auf das k wird im Folgenden verzichtet)

$$\sigma_{VT,h}(S+RV) = \sqrt{\sigma_{Z,h}^2(S+RV) + \sigma_{P,h}^2(S+RV)} = E_h(S+RV) \cdot \sqrt{Vko_{Z,h}^2 + Vko_{P,h}^2}$$

Das Versicherungsrisiko des OKP Geschäft inklusive Risikoausgleich wird wie folgt berechnet:

$$\sigma_{VT,OKP}(S+RV+RA) = \sqrt{\sigma_{S,OKP}^2(S+RV) + \sigma_{RA,OKP}^2(RA)}$$

S Schadensumme (Summe der Einzelleistungen Y)
RV Vom Rückversicherer übernommene Leistungen
RA Risikoausgleichszahlungen

Für die Aggregation der versicherungstechnischen Risiken über die verschiedenen Sparten werden die folgenden Korrelationen zwischen den Sparten vorausgesetzt:

	KVG-Taggeld Einzel	KVG-Taggeld Kollektiv	OKP	Aktive Rückversicherung OKP
KVG-Taggeld Einzel	100%	75%	50%	25%
KVG-Taggeld Kollektiv	75%	100%	50%	25%
OKP	50%	50%	100%	25%
Aktive Rückversicherung OKP	25%	25%	25%	100%

Wird aus den Standardabweichungen $\sigma_{VT,h}$ der verschiedenen Sparten der Vektor $\vec{\sigma}_{VT} = \begin{pmatrix} \sigma_{VT,1} \\ \vdots \\ \sigma_{VT,H} \end{pmatrix}$ gebildet und die oben stehende Korrelationsmatrix mit Σ_{VT} bezeichnet, beträgt die Varianz des gesamten versicherungstechnischen Risikos σ_V

$$\sigma_V = \sqrt{\vec{\sigma}_{VT}^{\mathrm{T}} \Sigma_{VT} \vec{\sigma}_{VT}}$$

5 Literaturverzeichnis

[1] Finma: Technisches Dokument zum Swiss Solvency Test, 2. Oktober 2006
https://www.finma.ch/FinmaArchiv/bpv/download/d/SST_technischesDokument_061002.pdf

[2] Bürgin, BAG: Berechnungsformeln für den Risikoausgleich mit PCG ab 2020 (8. Mai 2020)
https://www.bag.admin.ch/dam/bag/de/dokumente/kuv-aufsicht/pus/risikoausgleich/[...]

6 Anhang

6.1 Teuerungsfaktoren

Die Zahlungen des Risikoausgleichs werden durch eine lineare Regression aus den Beständen und Leistungen des Jahrs vor dem Ausgleichsjahr berechnet, siehe Kapitel 6.2. Um die Teuerung zwischen dem Vorjahr und dem Ausgleichsjahr zu berücksichtigen, werden die Leistungen der Versicherten durch kantonale Teuerungsfaktoren korrigiert. Diese werden aus den Nettoleistungen des Vorjahrs $t-1$ und des Ausgleichsjahrs t (beide Jahre mit 14-Monate-Zeithorizont) berechnet. Die Teuerung kann nach Art. 13 VORA nach Kanton und Risikoklasse abgestuft werden. Es ist vorgesehen, durchschnittliche Teuerungsfaktoren pro Kanton zu verwenden. Weil der Risikoausgleich nach Risikoklassen berechnet wird, muss nur die strukturunabhängige Niveau-Teuerung berücksichtigt werden.

Die Gesamtteuerung τ für einen bestimmten Kanton sei durch den Quotienten $\bar{x}^t/\bar{x}^{t-1}$ der Durchschnittskosten der beiden zu vergleichenden Jahre $t-1$ und t definiert. Diese beobachtbare **Gesamtteuerung $\boldsymbol{\tau}$** lässt sich in zwei Komponenten zerlegen. Einerseits variieren die Durchschnittskosten bereits, wenn sich die Versichertenstruktur verändert. Diese **Struktur-Teuerung $\boldsymbol{\tau_S}$** ergibt sich beispielsweise durch die steigende Lebenserwartung, oder wenn der Bevölkerungsanteil in teuren Risikoklassen ansteigt. Die Durchschnittskosten steigen auch durch die strukturunabhängige **Niveau-Teuerung $\boldsymbol{\tau_N}$**, welche sich beispielsweise durch Taxpunkt-Anpassungen ergeben kann.

Im Folgenden sollen kantonale Durchschnittswerte der Struktur- und Niveauteuerung berechnet werden. Dazu wird die kantonale Durchschnittsteuerung in die beiden Komponenten aufgeteilt.

Die kantonalen Durchschnittskosten lassen sich als gewichtetes Mittel der Durchschnittskosten der einzelnen Risikoklassen ermitteln:

$$\bar{x}^t = \frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^t$$

$\bar{x}_r^t$	Durchschnittskosten aller Versicherer in der Risikoklasse r im Jahr t
$\bar{x}^t$	Kantonale Durchschnittskosten aller Versicherer im Jahr t
n_r^t	Versichertenbestand aller Versicherer in der Risikoklasse r im Jahr t
$n^t = \sum_r n_r^t$	Versichertenbestand aller Versicherer im gesamten Kanton im Jahr t

Somit lässt sich die Teuerung τ auch folgendermaßen darstellen:

$$\tau = \frac{\bar{x}^t}{\bar{x}^{t-1}} = \frac{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^t}{\frac{1}{n^{t-1}}\sum_r n_r^{t-1} \cdot \bar{x}_r^{t-1}}$$

Führt man Teuerungsfaktoren pro Risikogruppe τ_r ein und ersetzt man im Zähler $\bar{x}_r^t$ durch $\tau_r \cdot \bar{x}_r^{t-1}$, so folgt:

$$\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^t = \frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot (\tau_r \cdot \bar{x}_r^{t-1}) \doteq \tau_N \cdot \frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^{t-1}$$

mit

$$\tau_N = \frac{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \tau_r \cdot \bar{x}_r^{t-1}}{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^{t-1}}$$

Die Niveauteuerung τ_N entspricht somit einem gewichteten Mittelwert der Teuerungsfaktoren τ_r. Damit kann die Teuerung τ in die Struktur- und Niveauteuerung zerlegt werden:

$$\tau = \frac{\bar{x}^t}{\bar{x}^{t-1}} = \frac{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^t}{\frac{1}{n^{t-1}}\sum_r n_r^{t-1} \cdot \bar{x}_r^{t-1}} = \tau_N \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{n^t}\sum_r n_r^t \cdot \bar{x}_r^{t-1}}{\frac{1}{n^{t-1}}\sum_r n_r^{t-1} \cdot \bar{x}_r^{t-1}}}_{\tau_S} = \tau_N \cdot \tau_S$$

Im Zähler $\frac{1}{n^t}\sum n_r^t \cdot \bar{x}_r^{t-1}$ erkennt man die mit den aktuellen Beständen gewichteten Vorjahres-Durchschnittsleistungen, welche bereits im heutigen Risikoausgleich zur Sicherstellung des Null-Summen-Spiels verwendet werden. Somit misst der Quotient τ_S, um wieviel die Durchschnittskosten $\bar{x}^{t-1}$ des Vorjahres aufgrund der Strukturveränderung zunehmen.

6.2 Lineare Regression

Die Zahlungen des Risikoausgleichs werden gemäss VORA Art. 16 durch eine lineare Regression berechnet, welche die monatlichen Kosten jedes Versicherten[4] schätzt. Als Datengrundlage werden die Nettoleistungen und Versichertenmonate im Jahr $t - 1$ verwendet, wobei die Leistungen mit der Niveau-Teuerung nach Kapitel 6.1 korrigiert werden.

Als Regressionsparameter werden die Kosten $a_{r,k}$ der Risikoklassen r im Kanton k und die Kosten b_p der PCG p verwendet. Im Folgenden werden die Indizes k und r der Kantone und Risikoklassen zum Index l zusammengefasst, der somit mit den Faktoren Kanton, Altersgruppe, Geschlecht und Spitalaufenthalt im Vorjahr die Werte 1 bis 26*60 = 1560 annimmt. Die PCG sind schweizweit definiert und nicht nach den anderen Risikoklassen aufgeteilt. Jeder Versicherte ist in genau einer Risikoklasse l und möglicherweise in einer oder mehreren PCG p enthalten. Damit erhält man den folgenden Regressionsansatz

$$S_i = a_0 + \sum_l R_{il} \cdot a_l + \sum_p P_{ip} \cdot b_p + \varepsilon_i$$

S_i stellen die monatlichen Nettoleistungen der Versicherten i und a_0, a_l und b_p die Regressionsvariablen dar. Die Matrizen R und P beschreiben die Einteilung der Versicherten in die Risikoklassen und PCG. Ist ein Versicherter i in einer der Risikoklassen l bzw. in einer PCG p enthalten, sind die Matrixelemente R_{il} bzw. P_{ip} gleich Eins und sonst gleich Null.

Die Schätzungen a_0, a_l und b_p werden durch Minimierung der quadratischen Abweichungen geschätzt. Dabei werden die Versicherten i mit der Anzahl ihrer Versichertenmonate m_i gewichtet:

$$\Delta = \sum_i m_i \cdot \varepsilon_i^2 = \sum_i m_i \cdot \left(S_i - a_0 - \sum_l R_{il} \cdot a_l - \sum_p P_{ip} \cdot b_p \right)^2 = minimal$$

Damit ist

$$\partial\Delta/\partial a_0 = \sum_i 2 \cdot m_i \cdot \left(S_i - a_0 - \sum_l R_{il} \cdot a_l - \sum_p P_{ip} \cdot b_p \right) \cdot (-1) = 0$$

$$\partial\Delta/\partial a_s = \sum_i 2 \cdot m_i \cdot \left(S_i - a_0 - \sum_l R_{il} \cdot a_l - \sum_p P_{ip} \cdot b_p \right) \cdot (-R_{is}) = 0 \quad s = 1, 2, 3, \ldots\ 1560$$

$$\partial\Delta/\partial b_q = \sum_i 2 \cdot m_i \cdot \left(S_i - a_0 - \sum_l R_{il} \cdot a_l - \sum_p P_{ip} \cdot b_p \right) \cdot \left(-P_{iq}\right) = 0 \quad q = 1, 2, 3, \ldots$$

Diese drei Gleichungen setzen gewichtete Summen der Residuen ε_i für unterschiedliche Klassen der Versicherten gleich Null. Die erste Gleichung bildet die Summe über die Versicherten aller Klassen,

[4] Die Versicherten entsprechen eigentlich Deckungsperioden. Z.B. werden Versicherte, die ihre Wohnkantone wechseln, in der linearen Regression als verschiedene Versicherte betrachtet.

während die anderen Gleichungen auf Grund der inneren Ableitungen $(-R_{is})$ und $(-P_{iq})$ nur die Versicherten der Risikoklassen s oder der PCG q berücksichtigen. Weil jeder Versicherte in genau einer der 1560 Klassen eingeteilt ist, entspricht die Summe der zweiten Gleichung über alle Klassen s gerade der ersten Gleichung. Die Gleichungen sind daher nicht linear unabhängig voneinander, d.h. das Gleichungssystem ist unterbestimmt und nicht lösbar. Im Folgenden werden daher die Variable a_0 und die erste Gleichung weggelassen.

Das verbleibende Gleichungssystem lässt sich in Matrixform schreiben:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{LL} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1P} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{L1} & \cdots & B_{LP} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1L} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{P1} & \cdots & B_{PL} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1P} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{P1} & \cdots & C_{PP} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_L \\ b_1 \\ \vdots \\ b_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^{RIS} \\ \vdots \\ S_L^{RIS} \\ S_1^{PCG} \\ \vdots \\ S_P^{PCG} \end{pmatrix}$$

Die Teilmatrizen A, B und C lassen sich formal mit Hilfe der Matrizen R und P berechnen. Die Gewichtung mit den Versichertenmonaten kann durch eine Diagonalmatrix M mit der Dimension der Anzahl Versicherten berücksichtigt werden, wobei die Diagonale die Anzahl der Versichertenmonate der Versicherten i enthalten, d.h. $M_{ii} = m_i$. Dann ist $A = R^T \cdot M \cdot R$, $B = R^T \cdot M \cdot P$ und $C = P^T \cdot M \cdot P$.

Damit lässt sich das Gleichungssystem wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{RIS} \\ S^{PCG} \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren $(a, b)^T$ und $(S^{RIS}, S^{PCG})^T$ enthalten die gesuchten Regressionsparameter bzw. die Gesamtleistungen der Risikoklassen und PCG. Die Elemente der Matrizen berechnen sich als Summen der Versichertenmonate jener Versicherten, welche in bestimmten Klassen oder PCG enthalten sind. Die gesamte, aus den Teilmatrizen zusammengesetzte Matrix ist somit symmetrisch. Das Matrixelement B_{lp} enthält beispielsweise die Anzahl der Monate derjenigen Versicherten, die gleichzeitig in die Risikoklasse l und die PCG p eingeteilt sind, da für diese Versicherten i die Matrixelemente R_{il} und P_{ip} beide gleich Eins sind. Die Teilmatrizen B und B^T enthalten somit die Versichertenmonate der Versicherten, die gleichzeitig in eine Risikoklasse und eine PCG eingeteilt sind.

Die Teilmatrix C zeigt die Verteilung der Versicherten in den PCG. Die Matrixelemente C_{pq} enthalten die Versichertenmonate der Versicherten, die gleichzeitig in der PCG p und q eingeteilt sind. Die Diagonalelemente von C enthalten somit die Anzahl der Versicherten pro PCG. Zudem gilt $C_{pp} = \sum_l B_{lp}$, da jeder in eine PCG eingeteilter Versicherter auch in einer der Risikoklassen enthalten ist. Die Teilmatrix A enthält in der Diagonalen die Anzahl der Versichertenmonate jeder Risikoklasse. A ist diagonal, weil jeder Versicherte in genau einer der Risikoklassen enthalten ist.

Insbesondere gilt für die Risikoklassen $S_l^{RIS} = A_{ll} \cdot a_l + \sum_p B_{lp} \cdot b_p$. Daher berechnen sich die Parameter a_l im Risikoausgleich ohne PCG als Durchschnittskosten der Klassen, d.h. $a_l = S_l^{RIS} / A_{ll}$.

Effiziente Berechnung der Regression

Die Berechnung der linearen Regression mit gegen 7 Mio. Erwachsenen und jungen Erwachsenen, 1560 Risikoklassen und über 30 PCG ist rechnerisch aufwändig. Das oben dargestellte Gleichungssystem lässt sich aber mit relativ wenig Aufwand lösen, da die Teilmatrix A diagonal und die Inverse A^{-1} einfach zu berechnen ist. Die Gleichungen können mit Hilfe der Teilmatrizen wie folgt geschrieben werden:

$$A \cdot a + B^T \cdot b = S^{RIS}$$
$$B \cdot a + C \cdot b = S^{PCG}$$

Wird aus der oberen Gleichung der Vektor $a = A^{-1} \cdot (S^{RIS} - B^T \cdot b)$ bestimmt und in die untere Gleichung eingesetzt, reduziert sich die Anzahl der numerisch zu lösenden Gleichungen auf die Anzahl der PCG:

$$(C - B \cdot A^{-1} \cdot B^T) \cdot b = S^{PCG} - B \cdot A^{-1} \cdot S^{RIS}$$

Die Lösung des reduzierten Gleichungssystems führt zu

$$a = A^{-1} \cdot \left(S^{RIS} - B^T \cdot (C - B \cdot A^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot (S^{PCG} - B \cdot A^{-1} \cdot S^{RIS})\right)$$
$$b = (C - B \cdot A^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot (S^{PCG} - B \cdot A^{-1} \cdot S^{RIS})$$

6.3 Beweise zur Stopp-Loss-Rückversicherung mit endlicher Kapazität

Beweis von (1):

Falls die Priorität nicht erreicht wird ($y < P$), so werden die vollen Leistungen durch den Erstversicherer übernommen.

Liegen die Leistungen im Intervall $P \le y \le P + K$, so wird der Erstversicherer nur mit P belastet.

Wird die Kapazität überschritten ($y > P + K$), so wird der Erstversicherer nur mit $y - K$ belastet.

Der erwartete Aufwand nach Rückversicherung beträgt somit

$$E(S_{SL}) = \int_{-\infty}^{P} y\varphi_S(y)dy + \int_{P}^{P+K} P\varphi_S(y)dy + \int_{P+K}^{\infty} (y-K)\varphi_S(y)dy$$

Diese drei Integrale basieren auf der ursprünglichen Dichtefunktion φ_S (vor Rückversicherung):

$$\varphi_S(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Um die Berechnung durchzuführen muss S zunächst standardisiert werden:

$$u(y) = \frac{y-\mu}{\sigma} \;\Leftrightarrow\; y = \sigma u + \mu \;\Rightarrow dy = \sigma \cdot du$$

$$E(S_{SL}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} (\sigma u + \mu) e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} \sigma \cdot du + P \cdot \int_{\frac{P-\mu}{\sigma}}^{\frac{P+K-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} \sigma \cdot du + \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} (\sigma u + \mu - K) e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} \sigma \cdot du \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} (\sigma u + \mu) e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du + P \cdot \int_{\frac{P-\mu}{\sigma}}^{\frac{P+K-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du + \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} (\sigma u + \mu - K) e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du \right) = J_1 + J_2 + J_3$$

Um das erste Integral zu berechnen, ist die für die Dichtefunktion φ der Standard-Normalverteilung gültige Ableitungsregel $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ hilfreich. Sie ergibt sich aus:

$$\frac{d}{dx} e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2} = -xe^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$$

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} (\sigma u + \mu) e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du$$

$$= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du$$

$$= \sigma \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u\varphi(u) du + \mu \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} \varphi(u) du$$

$$= \sigma \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} -\varphi'(u) du + \mu \cdot \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \mu \cdot \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) - \sigma \cdot \varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)$$

NB: Φ bezeichne die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{P-\mu}{\sigma}}^{\frac{P+K-\mu}{\sigma}} P e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du = P \int_{\frac{P-\mu}{\sigma}}^{\frac{P+K-\mu}{\sigma}} \varphi(u) du = P\left(\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$J_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} (\sigma u + \mu - K) \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du$$

$$= \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} u e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du + (\mu - K) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot u^2} du$$

$$= \sigma \cdot \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} u\varphi(u) du + (\mu - K) \cdot \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} \varphi(u) du$$

$$= \sigma \cdot \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} -\varphi'(u) du + (\mu - K) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$= \sigma \cdot \varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) + (\mu - K) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$E(S) = J_1 + J_2 + J_3 =$$

$$= \mu \cdot \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) - \sigma \cdot \varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) + P\left(\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) + \sigma \cdot \varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) + (\mu - K)\left(1 - \Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$= \mu \cdot \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) + \sigma\left(\varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) + P\left(\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) + (\mu - K)\left(1 - \Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

Unter Verwendung der Abkürzungen

$\varphi_P = \varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)$, $\varphi_{P+K} = \varphi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)$, $\Phi_P = \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)$, $\Phi_{P+K} = \Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)$

erhält man schliesslich $E(S_{SL}) = \mu\Phi_P + \sigma(\varphi_{P+K} - \varphi_P) + P(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)(1 - \Phi_{P+K})$.

Beweis von (2):

Für die Varianz $V(Y_{SL})$ nach Stopp-Loss-Rückversicherung gilt $V(Y_{SL}) = E(Y_{SL}^2) - E^2(Y_{SL})$.

Da der Erwartungswert $E(Y_{SL}) = \mu\Phi_P + \sigma(\varphi_{P+K} - \varphi_P) + P(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)(1 - \Phi_{P+K})$ bereits bekannt ist, genügt die Berechnung von $E(Y_{SL}^2)$. Auch hier zerlegen wir in 3 Integrale über die Bereiche $\{y|y < P\}$, $\{y|P \leq y < P + K\}$ und $\{y|y > P + K\}$:

$$E(Y_{SL}^2) = \int_{-\infty}^{P} y^2 f(y)dy + \int_{P}^{P+K} P^2 f(y)dy + \int_{P+K}^{\infty} (y-K)^2 f(y)dy = V_1 + V_2 + V_3$$

Die Standardisierung

$$u(y) = \frac{y-\mu}{\sigma} \Rightarrow dy = \sigma \cdot du \qquad y = \sigma u + \mu$$

führt zu

$$V_1 = \int_{-\infty}^{P} y^2 f(y)dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{P} y^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} (\sigma u + \mu)^2 e^{-\frac{u^2}{2}} \sigma \cdot du$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du + 2\sigma\mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u e^{-\frac{u^2}{2}} du + \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u^2 \varphi(u)du + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u\varphi(u)du + \mu^2 \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} \varphi(u)du = V_{11} + V_{12} + V_{13}$$

Um das erste dieser drei Integrale zu berechnen, benützt man die Beziehung

$$x^2\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{d}{dx}\big(x\varphi(x)\big)$$

Sie ergibt sich durch zweimalige Ableitung der Standardnormal-Dichte φ:

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -x\varphi(x)$$

$$\varphi''(x) = \tfrac{d}{dx}\big(-x\varphi(x)\big) = x^2\varphi(x) - \varphi(x) \;\Rightarrow\; x^2\varphi(x) = \varphi(x) - \tfrac{d}{dx}\big(x\varphi(x)\big)$$

$$V_1 = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u^2\varphi(u)du + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} u\varphi(u)du + \mu^2 \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} \varphi(u)du$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} \big(\varphi(u) - \big(u\varphi(u)\big)'\big)du + 2\sigma\mu \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} -\varphi'(u)du + \mu^2 \int_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} \varphi(u)du$$

$$= \sigma^2\big(\Phi(\mathrm{u}) - u\varphi(u)\big)\Big|_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} - 2\sigma\mu\varphi(u)\Big|_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}} + \mu^2\Phi(\mathrm{u})\Big|_{-\infty}^{\frac{P-\mu}{\sigma}}$$

$$= \sigma^2\left(\Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) - 2\sigma\mu\varphi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right) + \mu^2\Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \sigma^2\left(\Phi_P - \left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\varphi_P\right) - 2\sigma\mu\varphi_P + \mu^2\Phi_P$$

$$V_2 = \int_P^{P+K} P^2 f(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_P^{P+K} P^2\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy = P^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_P^{P+K} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= P^2\left(\Phi\left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{P-\mu}{\sigma}\right)\right) = P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P)$$

$$V_3 = \int_{P+K}^{\infty} (y-K)^2 f(y)dy = \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} (\sigma u + \mu - K)^2\varphi(u)du$$

$$= \sigma^2 \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} u^2\varphi(u)du + 2\sigma(\mu-K)\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} u\varphi(u)du + (\mu-K)^2\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} \varphi(u)du = V_{31} + V_{32} + V_{33}$$

$$V_{31} = \sigma^2\big(\Phi(\mathrm{u}) - u\varphi(u)\big)\Big|_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} = \sigma^2\left(1 - \Phi_{P+K} + \left(\frac{P+K-\mu}{\sigma}\right)\varphi_{P+K}\right)$$

$$V_{32} = 2\sigma(\mu-K)\int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} u\varphi(u)du = -2\sigma(\mu-K)\varphi(u)\Big|_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} = 2\sigma(\mu-K)\varphi_{P+K}$$

$$V_{33} = (\mu - K)^2 \int_{\frac{P+K-\mu}{\sigma}}^{\infty} \varphi(u)du = (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K})$$

$$V_3 \ = V_{31} + V_{32} + V_{33} = \sigma^2 \left(1 - \Phi_{P+K} + \left(\frac{P + K - \mu}{\sigma}\right) \varphi_{P+K}\right) + 2\sigma(\mu - K)\varphi_{P+K} + (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K})$$

$$V_1 = \sigma^2 \left(\Phi_P - \left(\frac{P - \mu}{\sigma}\right) \varphi_P\right) - 2\sigma\mu\varphi_P + \mu^2\Phi_P$$

$$V_2 = P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P)$$

$$V_3 = \sigma^2 \left(1 - \Phi_{P+K} + \left(\frac{P + K - \mu}{\sigma}\right) \varphi_{P+K}\right) + 2\sigma(\mu - K)\varphi_{P+K} + (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K})$$

$$\begin{aligned}
E(Y_{SL}^2) &= V_1 + V_2 + V_3 \\
&= \sigma^2 \left[\Phi_P - \left(\frac{P - \mu}{\sigma}\right) \varphi_P\right] - 2\sigma\mu\varphi_P + \mu^2\Phi_P + P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + \sigma^2 \left[1 - \Phi_{P+K} + \left(\frac{P + K - \mu}{\sigma}\right) \varphi_{P+K}\right] \\
&\qquad + 2\sigma(\mu - K)\varphi_{P+K} + (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K}) \\
&= \sigma^2 \left[1 - \Phi_{P+K} + \left(\frac{P + K - \mu}{\sigma}\right) \varphi_{P+K} + \Phi_P - \left(\frac{P - \mu}{\sigma}\right) \varphi_P\right] - 2\sigma\mu\varphi_P + \mu^2\Phi_P + P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P) \\
&\qquad + 2\sigma(\mu - K)\varphi_{P+K} + (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K}) \\
&= \sigma^2 \left[1 - (\Phi_{P+K} - \Phi_P) + \left(\frac{P + K - \mu}{\sigma}\right) \varphi_{P+K} - \left(\frac{P - \mu}{\sigma}\right) \varphi_P\right] - 2\sigma\mu\varphi_P + \mu^2\Phi_P + P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P) \\
&\qquad + 2\sigma(\mu - K)\varphi_{P+K} + (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K}) \\
&= \sigma^2 \left[1 - (\Phi_{P+K} - \Phi_P) + \left(\frac{P + K - \mu}{\sigma}\right) \varphi_{P+K} - \left(\frac{P - \mu}{\sigma}\right) \varphi_P\right] + 2\sigma\big((\mu - K)\varphi_{P+K} - \mu\varphi_P\big) \\
&\qquad + \mu^2\Phi_P + P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K})
\end{aligned}$$

Die gesuchte Varianz lautet daher:

$$\begin{aligned}
V(Y_{SL}) &= E(Y_{SL}^2) - E^2(Y_{SL}) \\
&= \sigma^2 \left(1 - (\Phi_{P+K} - \Phi_P) + \left(\frac{P + K - \mu}{\sigma}\right) \varphi_{P+K} - \left(\frac{P - \mu}{\sigma}\right) \varphi_P\right) \\
&\quad + 2\sigma\big((\mu - K)\varphi_{P+K} - \mu\varphi_P\big) + \mu^2\Phi_P + P^2(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)^2(1 - \Phi_{P+K}) \\
&\quad - [\mu\Phi_P + \sigma(\varphi_{P+K} - \varphi_P) + P(\Phi_{P+K} - \Phi_P) + (\mu - K)(1 - \Phi_{P+K})]^2
\end{aligned}$$